Метод осреднения и приложения к задачам гидродинамики

С. М. Зеньковская, В. Б. Левенштам

Одной из ярких страниц в научной биографии Игоря Борисовича является цикл работ по применению метода осреднения Ван-дер-Поля – Крылова – Боголюбова к нелинейным уравнениям параболического типа и к решению задач гидродинамической теории устойчивости. По этой тематике им опубликовано несколько работ в центральных журналах, а в 1989 г. в издательстве РГУ издана монография “Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости”.

Отличительной особенностью этой тематики является то, что Игорь Борисович, будучи строгим классическим математиком, в данном случае “сработал” сначала как физик. Он поставил задачу: как влияют высокочастотные вибрации на устойчивость движений жидкости. При решении задач устойчивости под действием высокочастотной вибрации хорошим ориентиром служит классическая модель маятника с вибрирующей точкой подвеса. В работах Н. Н. Боголюбова и П. Л. Капицы было установлено, что с помощью высокочастотных вертикальных вибраций можно сделать устойчивым верхнее положение физического маятника, которое при отсутствии вибрации неустойчиво. Теоретически этот эффект был интерпретирован с помощью применения метода осреднения к уравнениям колебаний маятника.

В механике сплошной среды этот метод был впервые применен в работе академика В. Н. Челомея (1956 г.) при исследовании влияния продольных вибраций на динамическую устойчивость упругих систем.

И. Б. Симоненко проявил незаурядную физическую интуицию, разглядев аналогию между маятником на вибрирующей опоре и жидкостью в конвективном движении, вызванном градиентом температуры и вибрацией контейнера.

В работе И. Б. Симоненко и С. М. Зеньковской “О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции” (Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа. 1966. № 5. С. 51–55) была рассмотрена следующая задача. Сосуд D с твердой непроницаемой границей ∂D, заполненный вязкой несжимаемой жидкостью, совершает как целое поступательные вертикальные гармонические колебания по закону $a/\omega \cos\omega t$. Предполагается, что частота колебаний ω велика, а амплитуда скорости a конечна, так что амплитуда колебаний a/ω мала. В результате проведенных математических исследований был сделан вывод: высокочастотные вертикальные колебания препятствуют возникновению конвекции. Более того, можно так подобрать амплитуду скорости вибрации, что состояние относительного покоя будет устойчиво при любых градиентах температуры (абсолютная стабилизация). В дальнейшем этот и другие теоретические выводы были подтверждены экспериментами, проведенными в Пермском университете (Г. Ф. Путин и его сотрудники).

Многочисленные физические эффекты удалось обнаружить благодаря применению метода осреднения к задаче конвекции. Ведущая идея этого асимптотического метода состоит в том, что в принятых условиях движение представляет собой суперпозицию плавного (медленного) движения и быстрых, но малых по амплитуде вибраций. Этот метод позволяет разделить движение на медленную и быструю составляющие, причем быструю компоненту удается выразить через медленную. Для последней получаются осредненные уравнения, которые автономны и содержат дополнительные силы, возникающие в результате взаимодействия вибрационных полей.

Покажем кратко, как это было сделано в указанной выше работе. Уравнения конвекции, записанные в подвижной системе координат, имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} - (g - \mathbf{w}_e)\beta T, \\ \operatorname{div}\, \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{w}_e = -a\omega\cos\omega t,\end{gathered} \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla T) = \chi\Delta T. \tag{2}$$

На границе ∂D должны выполняться краевые условия: $\mathbf{v} = 0$, $T = h(s)$, $s \in \partial D$.

Здесь $\mathbf{v}$ — относительная скорость; p — давление; T — температура; ρ_0 — плотность; ν, β, χ — коэффициенты кинематической вязкости, теплового расширения и температуропроводности; $\mathbf{g} = \mathbf{k}g$, где $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ — орт вертикальной оси; g — ускорение свободного падения; $\mathbf{w}_e$ — переносное ускорение. Уравнение (1) содержит быстро осциллирующий коэффициент $\cos\omega t$, что затрудняет, например, численное решение системы (1), (2). К этой системе был применен метод осреднения.

Полагаем $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \xi$, $T = \theta + \eta$, $p = q + \delta$, где $\mathbf{u}$, θ, q — плавные составляющие, ξ, η, δ — быстрые составляющие неизвестных, имеющие нулевое среднее. Подставляя эти разложения в уравнения (1) и (2) и выделяя главные по ω вибрационные члены, получим выражения для быстрых неизвестных:

$$\xi = -a\beta\sin\omega t\mathbf{w}, \quad \eta = -\frac{a\beta}{\omega}\cos\omega t(\mathbf{w}, \nabla\theta). \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{w} = \Pi(\mathbf{k}\theta)$, где Π — ортопроектор Вейля в $L_2(D)$ на пространство S_2 соленоидальных векторов с нулевой нормальной компонентой на границе, так что $\operatorname{div}\, \mathbf{w} = 0$, $w_n\big|_{\partial D} = 0$.

В результате осреднения получаем задачу:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u},\nabla)\mathbf{u}=-\frac{1}{\rho_0}\nabla q+\nu\Delta\mathbf{u}-\mathbf{g}\beta\theta+F_v;$$
$$F_v=\frac{1}{2}a^2\beta^2[\mathbf{k}(\mathbf{w},\nabla\theta)-(\mathbf{w},\nabla)\mathbf{w}], \tag{4}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+(\mathbf{u},\nabla\theta)=\chi\Delta\theta. \tag{5}$$

На границе ∂D краевые условия имеют вид: $\mathbf{u}=0$, $\theta=h$, $w_n=0$. Таким образом, в результате осреднения получилась автономная система, но с дополнительной силой F_v, которая имеет вибрационную природу — зависит от амплитуды скорости вибрации. Уравнения (4), (5) стали классическими, они вошли в учебники, их используют во многих работах, называя уравнениями Симоненко – Зеньковской. Если в задаче (4), (5) ввести безразмерные параметры, то получаем, что наряду с известными характерными параметрами $P=\nu/\chi$, $R=(T_1-T_2)\beta g l^3/\chi\nu$ — числами Прандтля и Рэлея, появился еще один параметр $\mu=(T_1-T_2)^2\beta^2a^2l^2/\chi\nu$ — вибрационное число Рэлея. Как видно, он не зависит от силы тяжести и может характеризовать конвекцию в условиях невесомости ($g=0$). Неслучайно результаты этой работы были использованы также при обработке и объяснении результатов экспериментов по конвекции на космических аппаратах. Зная стационарное решение задачи (4), (5), можно по формулам (3) найти быстрые добавки и тем самым главные члены соответствующего периодического решения задачи (1), (2).

Данная работа была первой по применению метода осреднения в гидродинамике. После этой статьи появились другие работы и возникло новое направление — вибрационная конвекция. В работах С. М. Зеньковской был получен новый эффект вибрации в случае невертикальных колебаний: конвекция может возникнуть не только при подогреве снизу, но и при нагреве сверху.

После формального применения метода осреднения возникли математические вопросы. Оценить, насколько близко полученное приближенное периодическое решение к точному. Исследовать, как связаны устойчивость стационарного решения осредненной задачи с устойчивостью соответствующего периодического решения исходной задачи. Как построить следующие приближения метода осреднения? Эти и многие другие математические проблемы были решены в работах И. Б. Симоненко по обоснованию метода осреднения для уравнений в частных производных и задач математической гидродинамики. Остановимся на этом более подробно.

В конце 60-х гг. И. Б. Симоненко приступил к проблеме обоснования метода осреднения для задачи конвекции. В то время работ по этой тематике для уравнений с частными производными было очень мало. В частности, параболические уравнения рассматривались в случае второго порядка, причем линейные (Р. З. Хасьминский) или полулинейные (С. Д. Эйдельман). Задача конвекции (1)–(2), помимо уравнения теплопроводности (2), содержит систему уравнений Навье – Стокса (1), описывающую движение вязкой несжимаемой жидкости. Эта система, как известно из математической гидродинамики, с помощью упоминавшегося выше проектора Вейля Π приводится к дифференциальному уравнению в банаховом пространстве S_2, главный операторный коэффициент $A_0=\Pi\Delta$ которого порождает в S_2 аналитическую полугруппу (П. Е. Соболевский, В. И. Юдович). Такие уравнения называют *абстрактными параболическими уравнениями.* В силу описанных обстоятельств, И. Б. Симоненко приступил сначала к обоснованию метода осреднения для абстрактных параболических уравнений вида

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(x,\omega t),\quad \omega\gg 1 \tag{6}$$

в комплексном банаховом пространстве B. Здесь A — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор в B; $f(x,\tau)$ — *подчиненное,* в определенном смысле, оператору A нелинейное отображение, обладающее средним

$$F(x)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int_0^N f(x,\tau)\,d\tau.$$

Поясним, что в приложениях к параболическим задачам оператор A определяется соответствующим эллиптическим дифференциальным выражением в совокупности с граничными условиями. При этом подчиненность f оператору A, грубо говоря, состоит в том, что наивысший порядок производных неизвестной функции, входящих в f, ниже порядка главного дифференциального выражения. В случае абстрактного уравнения (6) подчиненность f оператору A формулируется в терминах дробных степеней оператора $-A$, который, не нарушая общности, считается позитивным. В формулировке фигурируют банаховы пространства B^δ ($\delta\geqslant 0$) векторов x, принадлежащих области определения оператора $(-A)^\delta$, с нормой $\|x\|_{B^\delta}=\|(-A)^\delta x\|_B$.

Пусть $T>0$. На участке $t\in[0,T]$ рассмотрим задачу Коши для уравнения (6) с начальным условием

$$x(0)=x_0. \tag{7}$$

При отмеченых выше и некоторых дополнительных условиях И. Б. Симоненко обосновал принцип осреднения для этой задачи в следующем виде.

Пусть осредненная задача

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = Ay + F(y) \\ &y(0) = x_0 \end{aligned} \tag{8}$$

имеет на участке $t \in [0, T]$ решение $\overset{\circ}{y}(t)$. Тогда при достаточно больших ω на том же участке однозначно разрешима и возмущенная задача (6) – (7), причем для ее решения $x_\omega(t)$ справедливо соотношение

$$\lim_{\omega\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \|x_\omega(t) - \overset{\circ}{y}(t)\|_{B^1} = 0.$$

В том случае, когда отображение $f(x, \tau)$ является ℓ-периодическим по τ, И. Б. Симоненко обосновал метод осреднения и для задачи о $\ell\omega^{-1}$-периодических решениях уравнений вида (6). При этом предполагается, что осредненное уравнение (8) имеет невырожденное стационарное решение $\overset{\circ}{y}$, т.е. $F(\overset{\circ}{y}) = 0$, и дифференциал Фреше $(DF)(\overset{\circ}{y})$ обратим. Доказано, что при достаточно больших ω возмущенное уравнение имеет относительно единственное (т. е. единственное в некотором шаре) $\ell\omega^{-1}$ — периодическое решение $x_\omega(t)$, причем

$$\lim_{\omega\to\infty} \max_{t\in R} \|x_\omega(t) - \overset{\circ}{y}\|_{B^1} = 0.$$

Отметим, что ради краткости мы говорим здесь о некоторых результатах И. Б. не со всей достигнутой им глубиной и общностью.

Наметим схему И. Б. Симоненко обоснования метода осреднения для задачи (6)–(7). В силу того, что оператор A порождает аналитическую полугруппу e^{tA}, задачу (6)–(7) можно свести к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} f[x(\tau), \omega\tau]\, d\tau \equiv \\ &\equiv e^{tA}x_0 + N_\omega(x, t). \end{aligned}$$

Подобрав соответствующее банахово пространство вектор–функций, определенных на участке $t \in [0, T]$ (такой подбор является важной составляющей доказательства), И. Б. Симоненко рассматривает в этом банаховом пространстве операторы $M(\cdot, \omega)$:

$$[M(x, \omega)](t) \equiv e^{tA}x_0 + N_\omega(x, t), \quad \omega \leqslant \infty,$$

где $N_\infty(x, t) = \int\limits_0^t e^{(t-\tau)A} F[x(\tau)]\, d\tau$. Он доказывает, что отображение $M(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет в некоторой окрестности точки $(\overset{\circ}{y}(t), \infty)$ теореме о неявных операторах (неявно задан x), откуда и следует сформулированный выше принцип осреднения для задачи (6) – (7).

Упомянутые абстрактные результаты И. Б. Симоненко перенесены им затем на широкие классы параболических задач и систему Навье – Стокса. При этом он использует результаты С. Агмона об алгебраических условиях порождения эллиптической краевой задачей аналитической полугруппы и упоминавшиеся выше результаты П. Е. Соболевского и В. И. Юдовича, относящиеся к оператору A_0. Кроме того, на этом пути И. Б. Симоненко потребовалось переформулировать абстрактные требования к нелинейным частям уравнений, выраженные в терминах дробных степеней позитивных операторов, в обычных для математического анализа терминах. Так появились естественные условия принадлежности нелинейностей тем или иным пространствам Гельдера. Следует сказать, что важную роль в применении дробных степеней позитивных операторов в теории уравнений с неограниченными операторами в банаховых пространствах сыграли работы М. А. Красносельского и его учеников. При этом они доказали различные теоремы вложения, в которых фигурируют области определения дробных степеней позитивных операторов, с одной стороны, и гельдеровские или соболевские пространства функций, с другой. Анализируя доказательства некоторых из этих теорем, И. Б. Симоненко установил новую важную интерполяционную теорему, которая, в частости, позволяет упростить изложение части упомянутой теории вложений. С помощью этой теоремы И. Б. Симоненко и получил необходимые ему результаты о вложениях, которые носят в основном характер конструктивного описания областей определения дробных степеней эллиптических операторов и оператора $-A_0$.

Хорошо известно, что Марк Александрович Красносельский очень высоко ценил результаты Игоря Борисовича по методу осреднения.

Продолжая развивать теорию метода осреднения для абстрактных параболических уравнений, И. Б. Симоненко перешел к построению старших приближений решения возмущенной задачи (6). Он отметил, что решение осредненной задачи $\overset{\circ}{y}$ может не удовлетворять исследователя по следующим двум причинам. Во-первых, может быть недостаточной та норма, по которой решения x_ω и $\overset{\circ}{y}$ близки. Это имеет место, если исследователя интересует, скажем, функционал от x_ω, не являющийся непрерывным по этой норме. Во-вторых, может потребоваться приближение более высокого относительно ω^{-1} порядка, нежели норма разности $x_\omega - \overset{\circ}{y}$. И. Б. Симоненко отмечает, что вторая проблема в классической теории метода осреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известна и называется проблемой построения старших приближений. Она решается там с помощью классических замен переменных Крылова – Боголюбова. Первая же проблема характерна для уравнений в бесконечномерных пространствах. Для задачи (6) – (7) он занялся решением обеих проблем в совокупности. В результате для нелинейной задачи вида (6) – (7) была построена рекуррентная последовательность линейных абстрактных параболических задач с единым линейным оператором, решения которых позволяют аппроксимировать x_ω в любой из целой шкалы норм и с любой степенной относительно ω^{-1} точностью.

Перейдем теперь к проблеме обоснования метода осреднения непосредственно для задачи конвекции (1) – (2) с граничными условиями указанного выше вида:

$$u|_{\partial D} = 0, \quad \theta|_{\partial D} = h(s), \quad \partial D \in C_3. \tag{9}$$

И. Б. Симоненко рассмотрел и начально-краевую задачу конвекции на конечном временном участке $t \in [0, T]$, и задачу о $2\pi\omega^{-1}$-периодических по времени t решениях. Остановимся здесь на последней. При этом ее решением будем называть не только соответствующую тройку полей $(\mathbf{v}, T, p)$, но и ее компоненту $(\mathbf{v}, T)$. И. Б. Симоненко установил следующий результат.

Пусть усредненная задача (4), (5), (9) имеет стационарное решение $\overset{\circ}{\mathbf{v}}$, $\overset{\circ}{T}$, и спектр Λ линеаризованной на этом решении задачи для стационарных возмущений не содержит нуля. Тогда справедливы следующие утверждения. 1. Существуют такие числа r_0 и ω_0, что при $\omega > \omega_0$ задача (1), (2), (9) имеет единственное в шаре

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|\mathbf{v} - (\overset{\circ}{\mathbf{v}} - a\beta \sin\omega t \Pi_j \overset{\circ}{T})\|_{L_q(D)} + \\ + \sup_{t\in[0,\infty)} \|T - \overset{\circ}{T}\|_{W_q^1(D)} \leqslant r_0$$

$2\pi\omega^{-1}$-периодическое по t решение $(\mathbf{v}_\omega, T_\omega)$, и при этом

$$\lim_{\omega\to\infty} \sup_{t\in[0,\infty)} (\|\mathbf{v}_\omega - (\overset{\circ}{\mathbf{v}} - a\beta \sin\omega t \Pi k \overset{\circ}{T})\|_{L_q(D)} + \\ + \|T_\omega - \overset{\circ}{T}\|_{W_q^1(D)}) = 0, \quad q > 9.$$

2. Если спектр Λ расположен внутри левой комплексной полуплоскости, то решение $(\mathbf{v}_\omega, T_\omega)$ экспоненциально устойчиво по норме $L_q(D) \times W_q^1(D)$. 3. Если спектр Λ имеет хотя бы одну точку в правой комплексной полуплоскости, то решение $(\mathbf{v}_\omega, T_\omega)$ неустойчиво по норме $L_q(D) \times W_q^1(D)$.

Наметим схему доказательства лишь результата 1. На первом этапе доказательства подействуем на уравнение (1) проектором Π, учитывая при этом равенства $\Pi\mathbf{u} = \mathbf{u}$, $\Pi\dfrac{d\mathbf{u}}{dt} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$, $\Pi\nabla p = 0$. В результате система (1) перейдет в абстрактное параболическое уравнение, рассматриваемое в банаховом пространстве S_2. Поэтому и система конвекции (1), (2) примет форму абстрактного параболического уравнения, которое отличается от уравнения вида (6) присутствием в нем большого слагаемого, пропорционального $\omega \gg 1$. На втором этапе с помощью замены переменных уничтожается большое слагаемое. Эта замена идейно связана с классической заменой Крылова – Боголюбова, но здесь от нее дополнительно требуется соблюдение граничных условий. Последнее требование приводит, однако, к тому, что большой параметр ω проникает, помимо временной, и в пространственную часть аргументов некоторых слагаемых преобразованной системы, из-за которых эта система не является частным случаем уравнения (6). К третьему этапу можно отнести тяжелые аналитические исследования И. Б. Симоненко, где, в частности, систематически используется упомянутая выше его интерполяционная теорема, на основании которых установлено, что указанные слагаемые в определенном смысле являются младшими и малыми при $\omega \to \infty$. Это позволило далее использовать принципиально тот же подход, что и в задаче о периодических решениях уравнения (6). Так что четвертый этап состоит в применении теоремы о неявных операторах к соответствующим образом построенному операторному уравнению.

Известно, что научные интересы Игоря Борисовича разносторонние, и поэтому он с некоторых пор с метода осреднения переключился на другие задачи. Однако это направление было продолжено в работах его учеников и последователей. С. М. Зеньковская защитила кандидатскую диссертацию "Некоторые вопросы устойчивости периодических решений уравнений Навье – Стокса" (1971 г.). В настоящее время она занимается вместе со своими учениками решением задач вибрационной конвекции. В. Б. Левенштам защитил кандидатскую диссертацию "Некоторые вопросы теории метода усреднения на всей временной оси" (1977 г.) и докторскую диссертацию "Метод усреднения в теории нелинейных параболических уравнений с приложениями к задачам гидродинамики" (2000 г., Новосибирск). В настоящее время он вместе с учениками занимается развитием метода осреднения для некоторых новых задач. В последние годы активно включился в работу по тематике метода осреднения В. И. Юдович. Он всегда был в курсе работ Игоря Борисовича, участвовал в обсуждении как математических вопросов, так и в выборе моделей при решении задач гидродинамической теории устойчивости. В. И. Юдович развил общую теорию метода осреднения применительно к механическим системам со связями. В результате оказалось, что и задача о маятнике, и задача о балке Челомея, и конвекция суть частные случаи этой теории. Он ввел понятие виброгенной силы и изучил ее инвариантную геометрическую природу.

В заключение хочется сказать несколько слов об Игоре Борисовиче как о научном руководителе. Мы являемся его учениками и помним, как много внимания он уделял нам. А сейчас, когда мы уже сами имеем учеников, мы можем оценить, сколько сил и времени он тратит на работу со студентами, аспирантами, как ответственно относится к этому делу. И совсем не случайно его ученики, как правило, занимают призовые места на студенческих конференциях, а лучшие студенты идут на его кафедру.