Операторы локального типа и сингулярные интегральные операторы

В. С. Пилиди

Сначала напомним основные определения теории фредгольмовых операторов. Пусть $\mathfrak{X}$ — банахово пространство, $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$ ($\mathcal{K}(\mathfrak{X})$) — множество всех линейных непрерывных (всех компактных) операторов, действующих в пространстве $\mathfrak{X}$. Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ называется *фредгольмовым* оператором (Ф-оператором), если его ядро конечномерно, а образ замкнут и имеет конечную коразмерность[1]. Фредгольмовость оператора A равносильна существованию таких операторов $R_1,\ R_2 \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$, что выполняются равенства $R_1 A = I + T_1$, $AR_2 = I + T_2$, где $T_1,\ T_2 \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$. Операторы R_1 и R_2 называются соответственно левым и правым регуляризатором оператора A. Последнее свойство, очевидно, равносильно обратимости смежного класса $A+\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ в фактор-алгебре $\mathcal{B}(\mathfrak{X})/\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ ("алгебре Калкина"). Операторы A и B назовем *эквивалентными,* если $B - A \in \mathcal{K}(\mathfrak{X}$. Отметим следующий тривиальный факт: если два оператора эквивалентны, то из фредгольмовости одного из них следует фредгольмовость другого.

Локальным принципом в определенном смысле является классическая теория И.М. Гельфанда, позволяющая судить об обратимости элемента коммутативной банаховой алгебры в некоторых "локальных" терминах. Локальный метод И.Б. Симоненко является, по существу, некоторым аналогом этой теории. Говоря алгебраическим языком, этот принцип позволяет получить критерии обратимости элементов алгебр Калкина в некоммутативном случае.

Поясним приводимое ниже основное определение оператора локального типа следующим примером. Рассмотрим действующий в пространстве $L_2(0,1)$ оператор сингулярного интегрирования

$$(Sf)(x) = \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \frac{f(y)}{y-x}\,dy,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Пусть P_F — действующий в том же пространство оператор умножения на характеристическую функцию измеримого множества $F \subset [0,1]$. Если F_1 и F_2 — замкнутые *непересекающиеся* подмножества отрезка $[0,1]$, то интегральный оператор $P_{F_1} S P_{F_2}$ имеет ограниченное ядро и, следовательно, является компактным. Подчеркнем, что компактность рассмотренного оператора связана с тем, что сильная особенность ядра сосредоточена на диагонали его области определения.

Перейдем к общему определению оператора локального типа. Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство, на котором определена σ-конечная неотрицательная мера, причем все открытые множества являются измеримыми. Оператор $A \in \mathcal{B}(L_p(X))$ $(1 \le p < \infty)$ называется оператором локального типа, если для любых двух замкнутых непересекающихся подмножеств $F_1,\ F_2 \subset X$ оператор $P_{F_1} A P_{F_2}$ является компактным. Равносильным этому определению является следующее: для любой непрерывной на X функции φ коммутатор $\varphi A - A\varphi I$ является компактным.

Всюду далее при изложении локального принципа будем предполагать, что пространство X и число p являются фиксированными, и все рассматриваемые операторы являются операторами локального типа. Обозначение $\mathcal{K}(L_p(X))$ сократим до $\mathcal{K}$. Операторы A и B называются локально эквивалентными в точке $x \in X$, если $\inf\limits_u |(B-A)P_u| = 0$, где $|\cdot|$ означает полунорму по модулю компактных операторов, а точная нижняя грань берется по множеству всех окрестностей точки x в X (сокращенно этот факт отмечается так: $A \overset{x}{\sim} B$).

Оператор A называется *локально фредгольмовым* в точке $x \in X$, если существуют такие операторы R_1, R_2, что $R_1 A \overset{x}{\sim} I$, $AR_2 \overset{x}{\sim} I$.

Основным результатом локального принципа И.Б. Симоненко является следующее утверждение: *оператор является фредгольмовым тогда и только тогда, когда он является локально фредгольмовым в каждой точке множества X.*

Существенную роль играет также следующее утверждение: *если два оператора локально эквивалентны в некоторой точке, то из локальной фредгольмовости в этой точке одного из них следует такой же факт и для другого.*

Это свойство позволяет при анализе локальной фредгольмовости переходить к более простым операторам. Например, оператор умножения на непрерывную функцию φ локально эквивалентен в точке x_0 скалярному оператору $\varphi(x_0)I$.

Пусть Λ — банахова алгебра всех операторов локального типа. Для произвольной точки $x \in X$ обозначим через $\mathcal{I}_x$ множество всех операторов, локально эквивалентных нулевому оператору в этой точке. Если $\mathcal{I}_x = \Lambda$, то все операторы являются локально фредгольмовыми в этой точке (такие точки исключаются из анализа, и ниже мы для простоты будем считать, что множество X таких точек не имеет). В противном случае локальная фредгольмовость оператора A равносильна обратимости смежного класса $A + \mathcal{I}_x \in \Lambda/\mathcal{I}_x$. Тогда основная теорема локального принципа может быть переформули-

[1] Приведенные два термина практически вытеснили использовавшийся ранее термин "оператор Нетера". Заметим, что именно такой термин использовался в ставших классическими работах И.Б. Симоненко "Новый общий метод".

рована так: смежный класс $A + \mathcal{K} \in \Lambda/\mathcal{K}$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы все классы $A + \mathcal{I}_x \in \Lambda/\mathcal{I}_x$.

В случае коммутативных банаховых алгебр с единицей фактор-алгебра по модулю максимального идеала изоморфна полю комплексных чисел. Именно это свойство позволяет построить классическое преобразование Гельфанда. Напомним, что в общем случае это преобразование не является мономорфизмом, и его образ не совпадает с множеством всех непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов. Для операторов локального типа, естественно, отсутствует каноническая реализация фактор-алгебр $\Lambda/\mathcal{I}_x$, и в каждом конкретном случае проводится дополнительный анализ. Однако в общем случае существуют формулируемые в операторных терминах *необходимые и достаточные условия* типа непрерывности и утверждение, являющееся аналогом свойства изометричности (теорема об огибающем операторе и ее полученные в дальнейшем уточнения).

Локальный метод И.Б. Симоненко позволил провести исследование различных классов дискретных и континуальных операторов типа свертки, включая операторы типа свертки в конусах и связанные с ними краевые задачи теории функций нескольких комплексных переменных, одномерные и многомерные сингулярные интегральные операторы и некоторые классы псевдодифференциальных операторов. Этот метод и его многочисленные модификации позволили получить критерии сходимости различных приближенных методов для операторов типа свертки и сингулярных интегральных операторов. Следует особо подчеркнуть, что рассматриваемый локальный метод оказал исключительное влияние на качественную теорию операторных уравнений.

Детальное изложение локального метода с приложениями к фредгольмовской теории сингулярных интегральных операторов содержится в вышедшей в издательстве РГУ в 1986 г. книге И.Б.Симоненко и Чинь Нгок Миня “Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами”.

Из многочисленных исследований И. Б. Симоненко по теории сингулярных интегральных операторов отметим только “факторизационный” критерий фредгольмовости сингулярных интегральных операторов с измеримыми коэффициентами. Напомним, что при исследовании сингулярных интегральных операторов в классе гельдеровских функций (точнее при решении уравнений и построении их “фредгольмовской теории”) существенную роль играет факторизация коэффициента, т.е. есть его представление в виде произведения граничных значений двух аналитических функций и целой степени независимой переменной. В работе Игоря Борисовича для случая сингулярных интегральных операторов с (ограниченными) измеримыми коэффициентами получен *критерий* фредгольмовости операторов в терминах существования некоторой факторизации коэффициента.

Эти исследования были продолжены В.С.Пилиди, В.С.Рабиновичем и С.М.Грудским. В.С.Пилиди исследовал бисингулярные операторы и в 1972 г. защитил в РГУ кандидатскую диссертацию, а в 1990 г. в Тбилисском математическом институте (г. Тбилиси) — докторскую диссертацию на тему “Бисингулярные операторы и операторы близких к ним классов”. В.С.Рабинович изучил краевые задачи для псевдодифференциальных операторов типа свертки в конических областях и в 1968 г. защитил в РГУ кандидатскую диссертацию, а в 1993 г. в Физико-техническом институте низких температур (г. Харьков) — докторскую диссертацию на тему “Метод предельных операторов в вопросах разрешимости псевдодифференциальных уравнений и уравнений типа свертки ”. С.М. Грудский продолжил изучение одномерных сингулярных операторов с коэффициентами, имеющими нестандартные разрывы, и в 1981 г. защитил в РГУ кандидатскую диссертацию, а в 1995 году в Санкт-Петербургском университете — докторскую диссертацию на тему “Сингулярные интегральные операторы с бесконечным индексом и некоторые их приложения к задачам теории дифракции”.

Исключительно важную модификацию локального метода предложил А. В. Козак (кандидатская диссертация, 1974 г.). Его подход позволяет получать критерии применимости приближенных методов для широких классов операторов типа свертки. Предложенная А. В. Козаком схема исследования и ее модификации лежат в основе многочисленных публикаций в данном направлении. Распространение этой теории на псевдодифференциальные операторы осуществлено Р. Я. Докторским (кандидатская диссертация, 1978 г.). В связи с рассмотрением новых типов операторов возникла задача о вычислении их индексов. В 70-х гг. она была решена для операторов континуальной и дискретной свертки И.Б. Симоненко, В. Н. Семенютой (кандидатская диссертация, 1972 г.) и В. М. Деундяком (кандидатская диссертация, 1976 г.).